Calcul matriciel

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices

1.1 Définition

Une matrice M est un tableau à $n \geq 1$ lignes et $p \geq 1$ colonnes, d'éléments de K. On numérote les coefficients avec deux indices : le premier est le numéro de ligne (on numérote de haut en bas) et le second est le numéro de colonne (on numérote de gauche à droite). Ainsi a_{ij} est l'élément situé à l'intersection de $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne. On note $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ la matrice correspondante :

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Lorsque la ligne i et la colonne j ne sont pas spécifiées, a_{ij} s'appelle le terme général de la matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

La matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *est de taille* (n,p) *(dans cet ordre).*
L'ensemble des matrices à n *lignes et* p *colonnes (appelées plus simplement matrices* (n,p) *dans la suite) à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est noté* $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 1. Si $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors on a :

$$\begin{cases} a_{11} = 1, & a_{12} = 2, & a_{13} = 3 \\ a_{21} = 4, & a_{22} = 5, & a_{23} = 6. \end{cases}$$

Exemple 2. $(2i+j)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $(i-j)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2 Matrices particulières

1.2.1 Matrices colonnes

Ce sont les matrices à une colonne, donc de taille $(n,1)$ *:* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

1.2.2 Matrices lignes

Ce sont les matrices à une ligne, donc de taille $(1,p)$ *:* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$.

1.2.3 Matrices carrées

Ce sont les matrices qui ont mme nombre de lignes et de colonnes, appelé ordre de la matrice. Les coefficients ayant même indice de ligne et colonne sont appelés coefficients diagonaux. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *est une matrice carrée d'ordre* 2 *dont les éléments diagonaux sont* 1 *et* 4.
On note $M_n(\mathbb{K})$ *(à la place de* $M_{n,n}(\mathbb{K})$*) l'ensemble des matrices carrées d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

1.2.4 Matrices triangulaires inférieures

Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij *avec* $i < j$*) sont nuls. Par exemple :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2.5 Matrices triangulaires supérieures

Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement en dessous de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij *avec* $j < i$*) sont nuls. Par exemple :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2.6 Matrices diagonales

Ce sont les matrices carrées qui sont à la fois triangulaires inférieures et triangulaires supérieures. Les seuls coefficients éventuellement non nuls sont donc ceux situés sur la diagonale. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *la matrice diagonale dont les coefficients sont* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

1.2.7 Matrices scalaires

Ce sont les matrices diagonales dont tous les coefficients sont égaux. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

1.2.8 Matrice identité

Ce sont la matrice scalaire dont les coefficients valent 1. *On note* I_n *la matrice identité d'ordre* n, *ou simplement* I *s'il n'y a pas d'ambiguïté. Par exemple :*

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.9 Matrice nulle

C'est la matrice (pas nécessairement carrée) dont tous les coefficients sont nuls. On note $0_{n,p}$ *la matrice nulle à* n *lignes et* p *colonnes, ou simplement* 0 *s'il n'y a pas d'ambiguïté. Par exemple :*

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Calcul matriciel

2.1 Egalité matricielle

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n' \\ 1 \le j \le p'}}$ *sont égales, ce que l'on note* $A = B$, *si*

i) elles ont même nombre de lignes : $n = n'$ *;*

ii) elles ont même nombre de colonnes : $p = p'$ *;*

iii) leurs coefficients de mêmes indices sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *et tout* $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Exemple 3.

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 \\ -1 & \pi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 2-1 \\ 1-2 & \pi \\ 4-3 & \pi/\pi \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Addition matricielle

Soient A *et* B *deux matrices à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *ayant même nombre de lignes* n *et même nombre de colonnes* p : $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. *La somme* $A + B$ *de* A *et* B *est la matrice* (n, p) *dont chaque coefficient est la somme des coefficients de même position de* A *et de* B.
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ *alors*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}.$$

Exemple 5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+(-1) & 1+0 & 2+1 \\ 3+(-2) & 4+(-1) & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les règles suivantes se déduisent de celles de l'addition dans $\mathbb{K}$:

Proposition 2.1. *Soient A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.*

a) l'addition est associative : $(A+B)+C = A+(B+C)$;

b) l'addition est commutative : $A+B = B+A$;

c) la matrice nulle $0_{n,p}$ est élément neutre pour l'addition dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$: $A+0_{n,p} = A$;

d) toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ admet un symétrique, noté $-A$ et défini par $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, de sorte que $A+(-A) = 0$.

Remarque 2.1. *On note $A-B$ la somme de A et du symétrique $-B$ de B, de sorte que $A-B = A+(-B)$.*

2.3 Multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle produit (externe) de λ par A, la matrice notée λA, obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ :

$$\lambda A = \lambda(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Exemple 6.

$$\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi & 2\pi \\ 3\pi & 4\pi & 5\pi \end{pmatrix}.$$

Les règles suivantes se déduisent de celles de la multiplication dans $\mathbb{K}$ et de la Proposition 2.1.

Proposition 2.2. *Soient A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$.*

a) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;

b) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;

c) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;

d) $1A = A$.

Remarque 2.2. *Dans b), le choix de $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ montre que $(-1)A = -A$.*

2.4 Produit matriciel

2.4.1 Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soient $A = (a_1 \dots a_p)$ une matrice ligne de $M_{1,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 2.3. *Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*

Le produit de A par B, noté AB est la matrice $(1,1)$ dont le coefficient est :

$$a_1 b_1 + \dots a_p b_p = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k.$$

Exemple 7.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ((-1) \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3) = (2).$$

2.4.2 Produit d'une matrice par une matrice colonne

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ *une matrice colonne de* $M_{p,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 2.4. *La matrice A a autant de colonnes que B a de lignes.*

Le produit de A par B, noté AB, est la matrice $(n, 1)$ dont la ligne n^o i est le coefficient du produit de la ligne n^o i de A avec B :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \ldots + a_{1p}b_p \\ \vdots \\ a_{i1}b_1 + \ldots + a_{ip}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \ldots + a_{np}b_p \end{pmatrix}.$$

Exemple 8.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 \\ 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

2.4.3 Produit d'une matrice par une matrice

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ *deux matrices.*

Remarque 2.5. *Ici encore le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*

Le produit de A par B, noté AB, est la matrice (n, q) dont la colonne n^o j est le produit de A par la colonne n^o j de B.

Autrement dit, si pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$ *désigne la colonne n^o j de* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, *alors on a :*

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & \boxed{B_2} & \ldots & \boxed{B_q} \end{pmatrix} \text{ et } AB = \begin{pmatrix} \boxed{AB_1} & \boxed{AB_2} & \ldots & \boxed{AB_q} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.6. *Pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$ le produit de la matrice A par B_j est bien défini, car la matrice colonne B_j a autant de lignes que A a de colonnes.*

Exemple 9. Pour multiplier $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on commence par identifier $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Reste ensuite à calculer

$$\begin{aligned} AB_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times (-1) + 2 \times (-2) \\ 3 \times 0 + 4 \times (-1) + 5 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 1 + 4 \times 0 + 5 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 3 \times 2 + 4 \times 1 + 5 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} AB_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1 \\ 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puis à former la matrice produit :

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{AB_1} & \boxed{AB_2} & \boxed{AB_3} & \boxed{AB_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & 4 \\ -14 & -2 & 10 & 22 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.7. *Si* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ *alors pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$ *et tout* $j \in \{1, \dots, q\}$, *le coefficient d'indice* ij *de* AB *est :*

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \tag{1}$$

2.4.4 Propriétés

Restriction. *Le produit matriciel* AB *n'est défini que si le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B. *Et dans ce cas, la matrice produit* AB *a autant de lignes que* A *et autant de colonnes que* B.
Les propriétés suivantes se démontrent à partir de la formule (1).

Associativité. *Soient* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$. *Alors on a l'égalité suivante :*

$$(AB)C = A(BC).$$

Remarque 2.8.
- *Le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B *donc la matrice* AB *est bien définie et est de taille* (n, q) *;*
- *le nombre de colonnes de* AB *est égal au nombre de lignes de* C *donc la matrice* $(AB)C$ *est bien définie et est de taille* (n, r) *;*
- *le nombre de colonnes de* B *est égal au nombre de lignes de* C *donc la matrice* BC *est bien définie et est de taille* (p, r) *;*
- *le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* BC *donc la matrice* $A(BC)$ *est bien définie et est de taille* (n, r).

Non commutativité. *La multiplication matricielle n'est pas commutative.*
- *C'est évident lorsque le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B *mais que le nombre de colonnes de* B *diffère du nombre de lignes de* A, *comme dans l'Exemple 9 (où le produit matriciel* AB *est bien défini alors qu'on ne peut pas multiplier* B *par* A *puisque* B *a* 4 *colonnes alors que* A *n'a que* 2 *lignes).*
- *Mais, même lorsque* A *et* B *sont deux matrices carrées de même ordre, il peut arriver que* $AB \neq BA$. *C'est le cas par exemple si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *puisque l'on a :*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ mais } BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrice identité et multiplication. *Si* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *alors on a :*

$$I_n A = A I_p = A.$$

Distributivité par rapport à l'addition.
- *Si* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ *alors on a :*

$$(A + B)C = AB + BC.$$

- *Si* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ *alors :*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Compatibilité avec le produit externe. *Si* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, *alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a :*

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Diviseur de zéro.

— *Le produit de deux matrices non nulles peut être nul. C'est par exemple le cas de* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$*, puisqu'on vérifie par le calcul que :*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2+(-2)\times 1 & 1\times 4+(-2)\times 2 & 1\times 6+(-2)\times 3 \\ (-3)\times 2+6\times 1 & (-3)\times 4+6\times 2 & (-3)\times 6+6\times 3 \end{pmatrix} = 0_{2,3}.$$

On dit que A *est un diviseur de zéro à gauche et que* B *est un diviseur de zéro à droite.*

— *Et même si les matrices* A *et* B *sont carrées (et de même ordre), ce phénomène ne peut être exclu. Ainsi par exemple, pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$*, on a :*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2+2\times(-1) & 1\times(-6)+2\times 3 \\ 2\times 2+4\times(-1) & 2\times(-6)+4\times 3 \end{pmatrix} = 0_2.$$

— *On voit ainsi d'une façon générale, pour* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$*, que :*

$$(AB = 0_{n,q}) \not\Rightarrow (A = 0_{n,p} \text{ ou } B = 0_{p,q}).$$

2.4.5 Puissances

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ *et si* $k \in \mathbb{N}$*, on définit la puissance* $k^{\text{ième}}$ *de* A *comme suit :*

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0; \\ A^{k-1}A & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Exemple 10. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^0 = I_2$, $A^1 = A$ et

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1+0\times 0 & 1\times 0+0\times 0 \\ 0\times 1+0\times 0 & 0\times 0+0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi, $A^3 = A^2A = AA = A^2 = A$ donc par récurrence immédiate sur k, on voit que $A^k = A$ pour tout $k \geq 1$.

2.4.6 Inverse d'une matrice carrée